บทความวิชาการ

การประยุกต์ตัวแบบเชิงอนุพันธ์
(Differential Model Application)

ชะเอม สายทอง*

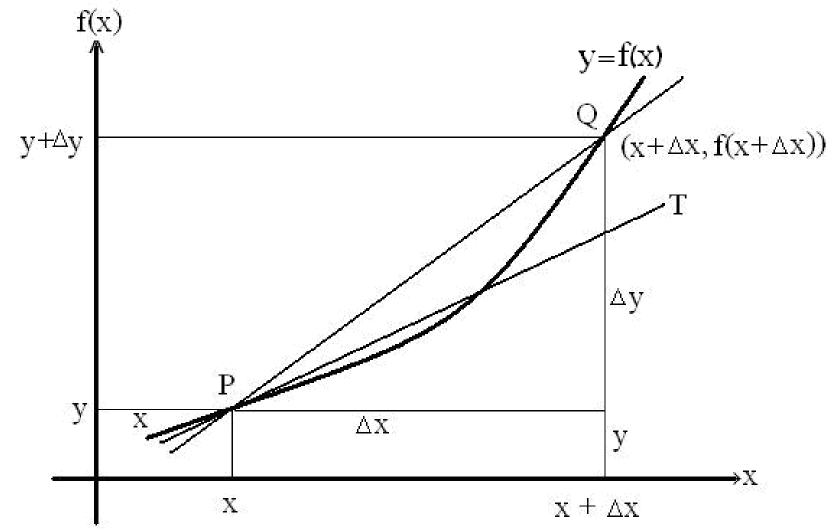
*สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ ภาควิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา 1061 ถนนอิสรภาพ แขวงหิรัญรูจี เขตธนบุรี กรุงเทพฯ 10600

แคลคูลัสเป็นวิชาหลักที่สำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ซึ่งพัฒนามาจากพีชคณิต เรขาคณิต และการประยุกต์ปัญหาทางฟิสิกส์ วิชาแคลคูลัสมีสาระที่สำคัญอยู่ 2 เรื่อง เรื่องที่ 1 คือ **อนุพันธ์** (derivative) ซึ่งว่าด้วยเรื่องการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ โดยใช้หลักของความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ ส่วนเรื่องที่ 2 คือ**ปริพันธ์** (integral) เป็นหลักและวิธีการคำนวณหาพื้นที่หรือปริมาตรของรูปทรงทางเรขาคณิตต่างๆ โดยใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์และกราฟของฟังก์ชันแทนรูปทรงทางเรขาคณิต ในบทความนี้ผู้เขียนได้นำบทประยุกต์ของแคลคูลัสในสาระแรกที่เกี่ยวกับอนุพันธ์ซึ่งเรียกว่า**แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์** (Differential Calculus) มานำเสนอให้แก่นักศึกษาและผู้สนใจได้ศึกษา โดยตั้งหัวข้อเรื่อง**การประยุกต์ตัวแบบเชิงอนุพันธ์** (Differential Model Application) ซึ่งได้กล่าวถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในที่นี้เฉพาะฟังก์ชันพีชคณิต และประยุกต์โดยใช้หลักการของอนุพันธ์หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

ผู้ที่เกิดแนวคิดเรื่องแคลคูลัสก่อนผู้ใดคือ เมื่อราว ค.ศ.1667 **เซอร์ ไอแซก นิวตัน** (Sir Isaac Newton) นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ มีชีวิตอยู่ระหว่าง ค.ศ.1643–1727 นิวตันสนใจในเรื่องคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา กฎเกณฑ์ของการเปลี่ยนแปลงนี้เองทำให้เป็นที่มาของแคลคูลัสในเรื่องของอนุพันธ์และปริพันธ์ นักคณิตศาสตร์อีกคนหนึ่งในเวลาใกล้เคียงกับนิวตันคือชาวเยอรมันชื่อ **กอตต์ฟริด วิลเฮล์ม ไลบ์นิตซ์** (Gottfried Wilhelm Leibniz) ซึ่งมีชีวิตอยู่ระหว่าง ค.ศ.1646–1716 ไลบ์นิตซ์มีแนวคิดในทำนองเดียวกับนิวตัน และทั้งสองคนเขียนจดหมายแลกเปลี่ยนแนวคิดซึ่งกันและกัน

ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การอธิบายวิธีการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้จากการประยุกต์ใช้หลักการของความชันของเส้นสัมผัสของส่วนโค้ง (ภาพที่ 1)



ภาพที่ 1. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จากภาพที่ 1 กำหนดให้เส้นโค้งของฟังชัน y = f(x) มีเส้นตรง PQ ผ่าน โดยมีพิกัดของ P และ Q อยู่ที่จุด P(x, f(x)) และ Q(x + Δx, f(x + Δx)) ตามลำดับ ดังนั้นความชันของเส้นตรง PQ คือ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ เมื่อ Δx $\neq$ 0 เคลื่อนจุด Q ไปตามส่วนโค้งของฟังก์ชัน f จน PQ เข้าใกล้ PT จะทำให้ Δx มีค่าลดลงเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ 0 นั่นคือจะได้ความชันของเส้นสัมผัสของโค้ง y = f(x) ณ จุด P ซึ่งเขียนสัญลักษณ์แทนดังนี้

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

เรียก $f'(x)$ ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f (ความชันของเส้นสัมผัสของกราฟ f ณ จุด P) และเรียก y' หรือ $\frac{dy}{dx}$ ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y เทียบกับ x

วิธีการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตามความหมายข้างต้นสามารถทำตามลำดับ 5 ขั้นตอน ซึ่งเรียกว่า **กฎห้าขั้นของการหาค่าอนุพันธ์** มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1. เขียน y = f(x) ตามที่โจทย์กำหนดให้

ขั้นที่ 2. แทนค่า x ในฟังก์ชันด้วย x + Δx แล้วคำนวณหาค่าใหม่ของฟังก์ชัน y + Δy

ขั้นที่ 3. เอาค่าเดิมของฟังก์ชันไปลบออกจากค่าใหม่เพื่อหา Δy

ขั้นที่ 4. หารด้วย Δx ตลอด

ขั้นที่ 5. หาลิมิตของผลหาร $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx เข้าสู่ 0 จะได้ค่าอนุพันธ์ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1. การหาค่าอนุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 + 5$ โดยใช้กฎห้าขั้นของการหาค่าอนุพันธ์ มีขั้นตอนดังต่อ ไปนี้

ขั้นที่ 1 ให้ $y = f(x) = 3x^2 + 5$ หรือ $y = 3x^2 + 5$

ขั้นที่ 2 $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$

$= 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$

ขั้นที่ 3 $y + \Delta y = 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$

$y = 3x^2 + 5$

ลบกันได้ $\Delta y = 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2$

ขั้นที่ 4 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

ขั้นที่ 5 ให้ $\Delta x \to 0$ จะได้

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}(6x+3\Delta x) = 6x$$ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3x^2+5)}{dx} = 6x$$

สูตรที่สำคัญ

สูตรการคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่สำคัญ ได้แก่

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว และ u เป็นฟังก์ชันของ x
4. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ เมื่อ u, v เป็นฟังก์ชันของ x
5. $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ เมื่อ u, v เป็นฟังก์ชันของ x
6. $\frac{d(\frac{u}{v})}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ เมื่อ u, v เป็นฟังก์ชันของ x และ $v \neq 0$
7. $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ตัวอย่าง 2. ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ โดยใช้สูตรจะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(7x^2)}{dx} + \frac{d(-5x)}{dx} + \frac{d(4)}{dx}$$

$$= 3x^2 + 14x^1 - 5x^0 + 0$$

$$= 3x^2 + 14x - 5$$

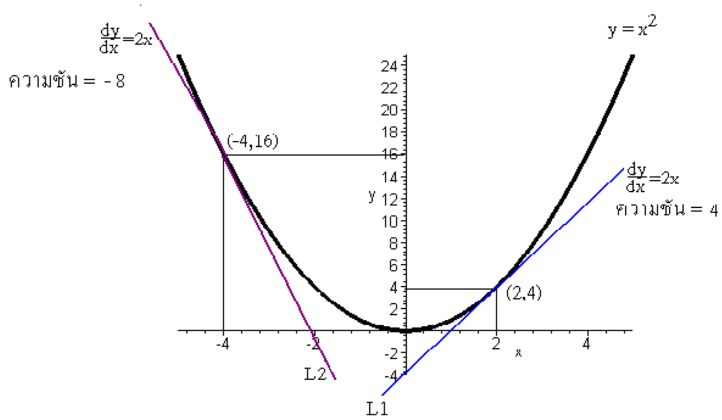
ปัจจุบันมีโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ทำให้สะดวกในการคำนวณ เช่น Maple, Mathlab เป็นต้น การใช้โปรแกรมเหล่านี้สามารถศึกษาได้จากคู่มือการใช้งานที่มีมากับโปรแกรม

ตัวอย่าง 3. ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = x^2$ คือ $y' = \frac{dy}{dx} = 2x$ (โดยใช้สูตรที่ 2) เขียนกราฟของ $y = x^2$ ได้รูปพาราโบลาดังภาพที่ 2 กราฟของ $\frac{dy}{dx} = 2x$ คือเส้นตรงที่สัมผัสกับโค้ง $y = x^2$ ณ จุดใดๆ ในภาพ

ถ้าเส้นตรง L1 สัมผัสโค้งที่ (2, 4) จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ 2x = 2(2) = 4

ถ้าเส้นตรง L2 สัมผัสโค้งที่ (– 4, 16) จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ 2x = 2(– 4) = – 8

ถ้าเส้นสัมผัสคือแกน x สัมผัสโค้งที่จุดกำเนิด (0,0) จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ 2x = 2(0) = 0 และจุดนี้ให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $y = x^2$



ภาพที่ 2. กราฟของ $y = x^2$ และเส้นสัมผัส

หลักการแก้ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

1. อ่านปัญหาโจทย์ว่าเป็นการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดแล้วให้กำหนดตัวแปรตาม y หรือตัวแปรตามอื่นๆ แทนปริมาณที่โจทย์ต้องการหา

2. พิจารณาว่าตัวแปรตาม y เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระอะไรบ้าง ถ้าเกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวแปร ให้พยายามเปลี่ยนมาใช้เป็นตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว อาจจะสมมติให้เป็นตัวแปร x หรือตัวแปรอื่นๆ ก็ได้

3. หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x ในรูปของสมการ $y = f(x)$ ซึ่งเรียกว่าการสร้างตัวแบบแทนปัญหา

4. หาค่าอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x นี่คือ $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

5. ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แล้วแก้สมการหาค่าของ x

6. ตรวจสอบค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของ $y = f(x)$

7. สรุปค่าของตัวแปรที่ได้และตอบตามสิ่งที่โจทย์ต้องการ

การตรวจสอบความชันของเส้นสัมผัสโค้งของฟังก์ชัน y = f(x) ว่าเมื่อไรจะได้ค่าสูงสุด หรือให้ค่าต่ำสุดมีวิธีที่ต้องอาศัยทฤษฎีต่างๆ แต่ในที่นี้จะใช้วิธีอย่างๆ คือ เส้นสัมผัสโค้งที่มีความชันเท่ากับ 0 จะให้ค่าค่าสูงสุดหรือให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และตรวจความเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของความชันว่าเพิ่มหรือลด เพื่อสรุปให้ได้ตามต้องการ

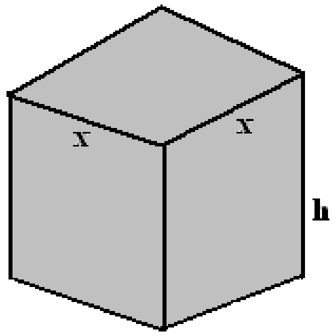
การประยุกต์อนุพันธ์เพื่อหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

การประยุกต์การใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันมีที่ใช้ในแขนงวิชาต่างๆ เช่น ในฟิสิกส์ ศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ อัตราการไหลของเหลว ในเศรษฐศาสตร์และธุรกิจ ศึกษาการขนส่ง เช่นการเลือกเส้นทางในการเดินทางจากแหล่งหนึ่งไปยังอีกแหล่งหนึ่งโดยใช้เวลาเดินทางน้อยที่สุด เจ้าของร้านจะต้องเลือกราคาขายสินค้าต่อหน่วยอย่างไรจึงจะทำให้ได้ผลกำไรมากที่สุด ในอุตสาหกรรมศึกษาการจ้างงาน การผลิตสินค้าและบรรจุภัณฑ์ เช่นผู้ผลิตสินค้าต้องคิดว่าขนาดของกล่องที่ใส่สินค้าต้องเป็นอย่างไรจึงจะทำให้ใช้วัสดุน้อยที่สุดเพื่อให้ได้รูปร่างและปริมาตรของกล่องตามที่กำหนดไว้ ในทางแพทย์ศึกษาวิจัยการใช้ยาเช่นปริมาณของยาและเวลาที่ใช้เหมาะสมควรเป็นอย่างไร ในทางวิศวกรรมศึกษาการคำนวณน้ำหนัก แรง การหาพื้นที่และปริมาตรเป็นต้น

ตัวอย่างของปัญหาที่นำมาให้ศึกษา

ปัญหาที่ 1. (การบรรจุภัณฑ์) โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตกล่องชนิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ค่าวัสดุที่ใช้ในการทำด้านข้างของกล่องราคา 10 บาทต่อตารางนิ้ว และค่าวัสดุที่ใช้ในการทำด้านบนและด้านล่างของกล่องราคา 20 บาทต่อตารางนิ้ว ถ้าต้องการทำกล่องให้มีปริมาตร 1,024 ลูกบาศก์นิ้ว จงหาขนาดของกล่องที่ทำให้เสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

แนวตอบ กำหนดให้กล่องมีฐานกว้างด้านละ x นิ้ว สูง h นิ้ว ดังนั้น ปริมาตรของกล่องคือ $x^2h = 1,024$ หรือ $h = \frac{1024}{x^2}$



ให้ y คือค่าใช้จ่ายในการทำกล่อง

ดังนั้น สมการตัวแบบของปัญหาคือ

$y = (2\times20\times x^2) + [4\times10\times x\,(\frac{1024}{x^2})]$

หรือ $y = 40x^2 + 40{,}960x^{-1}$

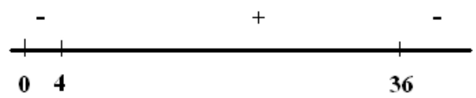
หาค่าอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x เราได้ $y' = \frac{dy}{dx} = 80x - 40{,}960x^{-2}$ ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ ดังนั้น $80x - 40{,}960x^{-2} = 0$ จะได้ x = 8 จาก $h = \frac{1024}{x^2}$ แทนค่า x ด้วย 8 จะได้ h = 16 สรุปนั่นคือขนาดของกล่องที่ต้องการทำมีฐานกว้างด้านละ 8 นิ้ว และสูง 16 นิ้ว

ปัญหาที่ 2. (การผลิตสินค้า) บริษัทผู้ผลิตจำหน่ายรถจักรยาน ต้องการผลิตรถจักรยานออกจำหน่าย โดยตั้งราคาขายคันละ 1,340 บาท ต้นทุนในการผลิตรถจักรยาน x คันเท่ากับ $\frac{5}{6}x^3 - 50x^2 + 1{,}700x + 3{,}000$ บาท จงหาว่าบริษัทควรผลิตรถจักรยานออกจำหน่ายกี่คัน จึงจะได้กำไรมากที่สุด

แนวตอบ สำหรับการผลิตรถจักรยาน x คัน จะมีรายได้เท่ากับ 1,340x บาท ให้ y คือกำไรทั้งหมด กำไร = รายได้ – รายจ่าย ดังนั้นสมการตัวแบบของปัญหาคือ

$y = 1{,}340x - (\frac{5}{6}x^3 - 50x^2 + 1{,}700x + 3{,}000)$ บาท

หาค่าอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x ได้คือ $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{6}(x - 36)(x - 4)$ ให้ $y' = \frac{dy}{dx} = 0$ จะได้ $-\frac{5}{6}(x - 36)(x - 4) = 0$ ดังนั้น x = 36 หรือ 4 ตรวจสอบเครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ ในช่วง x เท่ากับ 0 ถึง 36



เมื่อ 0 < x< 4 ค่าของ $\frac{dy}{dx}$ ลด

เมื่อ 4 < x< 36 ค่าของ $\frac{dy}{dx}$ เพิ่ม

ดังนั้นค่าของ y สูงสุดเมื่อ x = 36 นั่นคือ บริษัทควรผลิตรถจักรยาน 36คัน จึงจะมีกำไรสูงสุด

ปัญหาที่ 3. (การผลิตสินค้า) ถ้าบริษัทผลิตสายเคเบิลไฟฟ้าคำนวณราคาขายของสายไฟฟ้าไว้เท่ากับ y บาทต่อเมตร และราคาขายมีสมการตัวแบบเป็น $y = \frac{120}{x} + 600x$ เมื่อ x คือพื้นที่หน้าตัดของสายไฟฟ้านี้ (x มีหน่วยเป็นตารางเซ็นติเมตร) ถามว่าราคาสายไฟฟ้าต่ำสุดเป็นเท่าไร และจะมีพื้นที่หน้าตัดเท่าไร

แนวตอบ จากสมการตัวแบบราคาขาย $y = \frac{120}{x} + 600x$ หาค่าอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x ได้ $\frac{dy}{dx} = -\frac{120}{x^2} + 600$ ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ ดังนั้น $-\frac{120}{x^2} + 600 = 0$ แก้สมการได้ $x = \sqrt{0.2} = 0.447$ ตรวจสอบ $\frac{dy}{dx}$ ที่ x = 0.447 ให้ค่า y ต่ำสุด ดังนั้น จากสมการ $y = \frac{120}{x} + 600x$ เมื่อ x = 0.447 จะได้ $y = \frac{120}{0.447} + 600(0.447) = 537$ นั่นคื ราคาสายไฟฟ้าต่ำสุดเป็น 537 บาทต่อเมตร และมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 0.447 ตารางเซ็นติเมตร

ปัญหาที่ 4. (การผลิตสินค้า) โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้าในแต่ละสัปดาห์มีค่าใช้จ่ายคำนวณได้เท่ากับ $5{,}000 - \frac{x^2}{6{,}000}$ บาท เมื่อใช้วัสดุ x กิโลกรัมสำหรับการผลิต และรายได้จากการผลิตเท่ากับ $75{,}000 - \frac{x}{60}$ บาท จงหาว่าโรงงานควรใช้วัสดุสำหรับการผลิตสัปดาห์ละกี่กิโลกรัม จึงจะได้กำไรสูงสุด

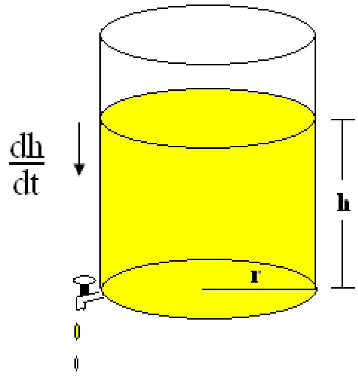
แนวคิด ให้ y แทนกำไรจากการผลิต กำไร = รายได้ – รายจ่าย จะได้สมการตัวแบบแทนปัญหาคือ

$$y = (75{,}000 - \frac{x}{60}) - (5{,}000 - \frac{x^2}{6{,}000}) = \frac{x^2}{6{,}000} - \frac{x}{60} + 70{,}000$$

หาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3{,}000} - \frac{1}{60}$ ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ จะได้ $\frac{x}{3{,}000} - \frac{1}{60} = 0$ แก้สมการได้ x = 50 กิโลกรัม เมื่อ x = 50 จะได้ $y = \frac{50^2}{6{,}000} - \frac{50}{60} + 70{,}000 = 69{,}999.50$ บาท นั่นคือโรงงานควรใช้วัสดุสำหรับการผลิตสัปดาห์ละ 50 กิโลกรัม จึงจะได้กำไรสูงสุด และกำไรสูงสุดเท่ากับ 69,999.50 บาท

ปัญหาที่ 5. (อัตราการไหลของเหลว) ถังใบหนึ่งเป็นรูปทรงกระบอก รัศมีของก้นถังเป็น 10 เมตร ใส่น้ำในถังไว้สูง h เมตร ถ้าปล่อยให้น้ำในถังไหลออกด้วยอัตราเร็ว 3,000 ลิตรต่อนาที ความสูงของน้ำในถังจะลดลงด้วยอัตราเร็วเท่าไร

แนวคิด ให้ v เท่ากับปริมาตรของน้ำในถัง เนื่องจาก $\frac{dv}{dt}$ = อัตราเร็วของน้ำไหลออกจากถัง จึงกำหนดให้มีค่าเป็นลบ ดังนั้นจากโจทย์กำหนด



ดังนั้น $v = \pi r^2 h$

$= (\pi)(10^2)\,h$ ลูกบาศก์เมตร

$= (1{,}000)(\pi)(10^2)\,h$ ลิตร

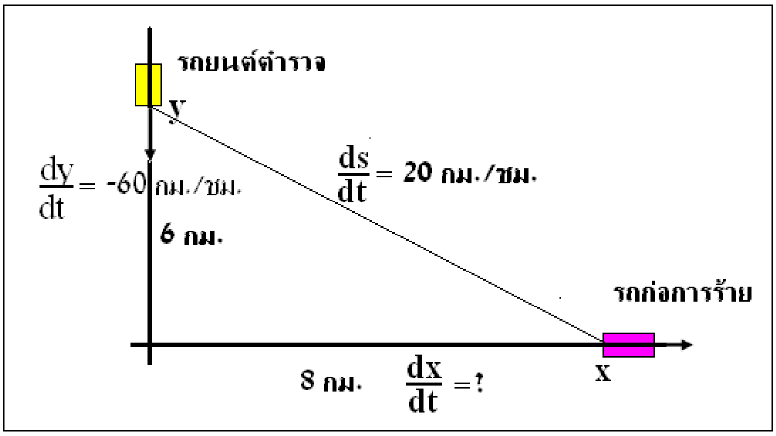
$= 100{,}000\,\pi h$ ลิตร

$\frac{dv}{dh} = 100{,}000\,\pi$ ……….(1)

จะได้ $\frac{dv}{dt} = -3{,}000$ ลิตรต่อนาที……..(2)

(2) ÷ (1) จะได้ $\frac{dh}{dt} = \frac{-3}{100\pi} = -0.0095$ เมตร/นาที ซึ่งคืออัตราการลดของความสูงของน้ำในถังตามต้องการ

ปัญหาที่ 6. (อัตราการเคลื่อนที่ของวัตถุ) รถยนต์ตำรวจสำหรับตรวจการณ์ คันหนึ่งแล่นด้วยความเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง กำลังมุ่งหน้าไปทาง ทิศใต้ในถนนที่เป็นเส้นตรง ขณะที่อยู่ห่างจากสี่แยกข้างหน้า 6 กิโลเมตร ได้สังเกตโดยเรด้าว่ามีรถยนต์ก่อการร้ายคันหนึ่งอยู่ห่างจากสี่แยกไปทางทิศตะวันออก 8 กิโลเมตร และการตรวจจากเรด้าพบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวเส้นตรงจากรถยนต์ตำรวจไปยังรถยนต์ก่อการร้ายคันดังกล่าวเพิ่มขึ้น 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่ารถยนต์ก่อการร้ายวิ่งด้วยความเร็วเท่าไร



แนวคิด จากภาพกำหนดให้ x เป็นระยะห่างจากรถยนต์ก่อการร้ายถึงสี่แยก y เป็นระยะห่างจากรถยนต์ตำรวจถึงสี่แยก s เป็นระยะห่างของรถยนต์ 2 คันนั้น

ดังนั้น $s^2 = x^2 + y^2$ หาอนุพันของ s เทียบกับ t

จะได้ $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt})$ ……...(1)

มี x = 8 กม. y = 6 กม. $\frac{ds}{dt}$ = 20 กม./ชม. และ $\frac{dy}{dt} = -60$ กม./ชม.

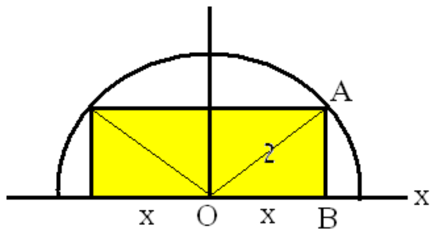
แทนค่าในสมการ (1) ดังนั้น

$20 = \frac{1}{\sqrt{8^2+6^2}}[8\frac{dx}{dt} + 6(-60)]$ แก้สมการได้

$\frac{dx}{dt}$ = 70 กม./ชม. นั่นคือ รถยนต์ก่อการร้ายวิ่งด้วยความเร็ว 70 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ปัญหาที่ 7. (รูปเรขาคณิต) จงหารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุอยู่ในรูปครึ่งวงกลมที่มีรัศมียาว 2 หน่วย

แนวคิด จากรูปกำหนดให้ y เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า x เท่ากับความยาวครึ่งหนึ่งของด้านฐานของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



สามเหลี่ยม OAB ได้ AB = $\sqrt{4-x^2}$
ดังนั้นสมการตัวแบบของพื้นที่
ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้คือ y = $2x\sqrt{4-x^2}$

หาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x จะได้

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$ ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ ดังนั้น

$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$ แก้สมการจะได้ $x = \pm\sqrt{2}$

ใช้ x เฉพาะค่าบวก นั่นคือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $2\sqrt{2}\,(\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}\,) = 4$ ตารางหน่วย โดยมีความยาวของฐาน $2\sqrt{2}$ และสูง $\sqrt{2}$ หน่วย

ปัญหาที่ 8 . (การประกอบการ) บริษัทก่อสร้างแห่งหนึ่งต้องการเช่ารถตักดินเพื่อตักดินทำสระเป็นปริมาตร 25,000 ลูกบาศก์เมตร เจ้าของรถตักดินคิดค่าเช่ารถตักดินคันละ 2,000 บาท รวมกับค่าเช่าเวลาอีก 1,200 บาทต่อชั่วโมงต่อคัน ถ้ารถตักดินแต่ละคัน

แนวคิด ให้ x เป็นจำนวนรถตักดินที่เช่า y เป็นค่าเช่ารวม จะได้เวลาที่ใช้ในการตักดิน $=\frac{25,000}{75x}$ ชั่วโมง ดังนั้นสมการตัวแบบคือ $y = 2,000x + 1,200(\frac{25,000}{75x}) = 2,000x + \frac{400,000}{x}$

หาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2,000 - \frac{400,000}{x^2}$ ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ ดังนั้น $2,000 - \frac{400,000}{x^2} = 0$ แล้วแก้สมการได้ $x^2 = 200$ หรือ $x = \pm\sqrt{200} = 14.14 \approx 15$ คัน (ใช้เฉพาะค่าบวก) ค่าใช้จ่าย

$$Y = 2,000x + \frac{400,000}{x} = 2,000(15) + \frac{400,000}{15} = 56,666.67$$

บาท นั่นคือบริษัทก่อสร้างจะต้องเช่ารถตักดิน 15 คัน และเสียค่าเช่าน้อยที่สุดเป็นเงิน 56,666.67 บาท

ปัญหาที่ 9. (แพทย์ทดลองยา) จากการวิจัยของแพทย์พบว่า ปริมาณน้ำตาลในเลือดจะมีปริมาณ $6x + \frac{600}{x+3}$ มิลลิกรัม เมื่อ x คือจำนวนเวลา (ชั่วโมง) ที่ให้สารอินซูลิน (insulin) และ $x \leq 24$ ชั่วโมง จงหาว่าเมื่อเวลาเท่าไรปริมาณน้ำตาลในเลือดจะมีปริมาณต่ำที่สุด และปริมาณต่ำสุดมีกี่มิลลิกรัม

แนวคิด ให้ y คือปริมาณน้ำตาลในเลือด ดังนั้นสมการตัวแบบคือ $y = 6x + \frac{600}{x+3}$ หาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x จะได้ $\frac{dy}{dx} = 6 - \frac{600}{(x+3)^2}$ ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ ดังนั้น $6 - \frac{600}{(x+3)^2} = 0$ แก้สมการได้ x = 7 ชั่วโมง ดังนั้น $y = 6(7) + \frac{600}{7+3} = 102$ มิลลิกรัม นั่นคือ เมื่อเวลามาถึง 7 ชั่วโมง น้ำตาลในเลือดจะมีปริมาณต่ำที่สุดและมีปริมาณต่ำสุดเท่ากับ 102 มิลลิกรัม

บทสรุป

การประยุกต์ตัวแบบเชิงอนุพันธ์มีที่นำไปใช้ประโยชน์ในวิชาฟิสิกส์ เศรษฐศาสตร์ ธุรกิจ อุตสาหกรรม วิศวกรรม และแพทย์ เป็นต้น มีหลักการคือสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แทนปัญหาที่ต้องการแก้โดยแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร y ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร x ใช้หลักการหาค่าอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x เพื่อบอกความชันของเส้นสัมผัสโค้งของฟังก์ชันตัวแบบ และใช้วิธีการของค่าต่ำสุดสูงสุด เพื่อสรุปค่าของตัวแปรที่ได้และตอบตามสิ่งที่โจทย์ต้องการ

เอกสารอ้างอิง

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา. (2550). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. (โรเนียวเย็บเล่ม).

ลำดวน ยอดยิ่ง. (2549). **แคลคูลัส 1–1** (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: ส. เอเซียเพรส.

Thomas, G.B., and others. (1996). **Calculus and Analytic Geometry** (9th ed.). New York : Addison–Wesley.

Urso, R. (1995). **Calculus with applications**. New York: McGraw-Hill.