บทความวิชาการ

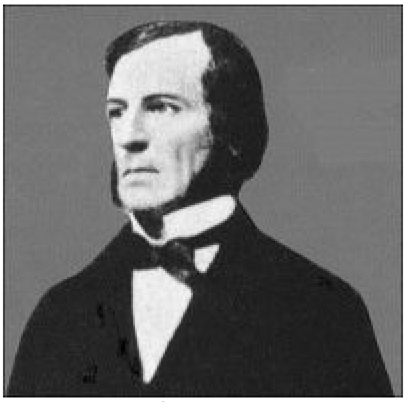
พีชคณิตแบบบูล

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อประยุกต์ด้านอิเล็กทรอนิกส์

ชะเอม สายทอง*

*โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา 1061 ถนนอิสรภาพ แขวงหิรัญรูจี เขตธนบุรี กรุงเทพฯ 10600

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **พีชคณิตแบบบูล** (Boolean algebra) คิดขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ชาติอังกฤษชื่อ จอร์จ บูล (George Boole) มีชีวิตอยู่ระหว่าง ค.ศ.1815-1864 พีชคณิตแบบบูลเป็นตัวแบบสำคัญที่นำไปประยุกต์ในด้านวงจรอิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งมีสมบัติดังบทนิยามต่อไปนี้



ภาพที่ 1. จอร์จ บูล

บทนิยาม 1 พีชคณิตแบบบูลเป็นระบบคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วยเซต S และ $S \neq \phi$ กับการดำเนินการทวิภาค $\oplus$ และ $\otimes$ ซึ่งเป็นจริงสำหรับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) S มีสมบัติปิดสำหรับการดำเนินการทวิภาค $\oplus$ และ $\otimes$

2) มีสมบัติสลับที่สำหรับการดำเนินการทวิภาค $\oplus$ และ $\otimes$

3) มีเอกลักษณ์ e และ i ซึ่ง $e \neq i$ ในเซต S ที่ทำให้ $a \oplus e = a = e \oplus a$ และ $a \otimes i = a = i \otimes a$ สำหรับ a ทุกตัวใน S

4) กฎการแจกแจงสำหรับ $\oplus$ และ $\otimes$ ใน S เป็นจริงกล่าวคือ สำหรับ a, b, c ทุกตัวของ S

$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$

$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

5) สำหรับ a ทุกตัวของ S จะมี a' เป็นตัวผกผันของ a ที่ทำให้ $a \otimes a' = e = a' \otimes a$

นิยมใช้สัญลักษณ์ $(S, \oplus, \otimes)$ แทนระบบคณิตศาสตร์ที่เป็นพีชคณิตแบบบูล

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ A = {a, b} จะได้ P(A) = {ϕ, {a}, {b}, {a, b} } ดังนั้น (P(A), $\cup$, $\cap$) จะเป็นพีชคณิตแบบบูล เพราะว่า

1) P(A) มีสมบัติปิดสำหรับการดำเนินการทวิภาค $\cup$ และ $\cap$ แสดงได้จากตารางที่ 1 และตารางที่ 2 ซึ่งเป็นตารางแสดง $\cup$ และ $\cap$ ของ P(A) ตามลำดับ

ตารางที่ 1

$\cup$	ϕ	**{a}**	**{b}**	**{a, b}**
ϕ	ϕ	{a}	{b}	{a, b}
{a}	{a}	{a}	{a, b}	{a, b}
{b}	{b}	{a, b}	{b}	{a, b}
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}

2) สมบัติสลับที่สำหรับ $\cup$ และ $\cap$ ของสมาชิกของ P(A) เป็นจริง

3) ϕ เป็นเอกลักษณ์สำหรับ $\cup$ และ {a, b} เป็นเอกลักษณ์สำหรับ $\cap$

ตารางที่ 2

$\cap$	ϕ	**{a}**	**{b}**	**{a, b}**
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
{a}	ϕ	{a}	ϕ	{a}
{b}	ϕ	ϕ	{b}	{b}
{a, b}	ϕ	{a}	{b}	{a, b}

4) กฎการแจกแจงเป็นจริงสำหรับ $\cup$ และ $\cap$ โดยใช้ทฤษฎีเซต กล่าวคือ ถ้า A, B, C เป็นสมาชิกของ P(A) แล้วจะได้

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ และ

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5) สำหรับสมาชิก X ใด ๆ ที่อยู่ใน P(A) จะมี X' เป็นตัวผกผัน กล่าวคือ

$\phi \cup$ {a, b} = {a, b} และ $\phi \cap$ {a, b} = ϕ

ดังนั้น {a, b} คือตัวผกผันของ ϕ

{a} $\cup$ {b} = {a, b} และ {a} $\cap$ {b} = ϕ

ดังนั้น {b} คือตัวผกผันของ {a}

{b} $\cup$ {a} = {a, b} และ {b} $\cap$ {a} = ϕ

ดังนั้น {a } คือตัวผกผันของ {b}

{a, b} $\cup$ ϕ = {a, b} และ {a, b} $\cap$ ϕ = ϕ

ดังนั้น ϕ คือตัวผกผันของ {a, b}

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ S = {0, 1} และนิยามการบวกและคูณสำหรับสมาชิกของ S ดังตารางที่ 3 และตารางที่ 4 จะได้ (S, +, $\times$) เป็นพีชคณิตแบบบูล เพราะว่า

ตารางที่ 3

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

ตารางที่ 4

$\times$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

1) S มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและคูณ

2) สมบัติสลับที่เป็นจริงสำหรับการบวกและคูณใน S

3) 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก และ 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

4) กฎการแจกแจงเป็นจริงสำหรับการบวกและการคูณกล่าวคือ ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ S จะได้ $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ และ $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

การแสดงว่าสมบัติข้อ 4) นี้เป็นจริงต้องแสดงถึง 16 กรณี อาจใช้ตารางในทำนองเดียวกันกับการหาค่าความจริงของประพจน์ในตรรกศาสตร์

0 และ 1 ต่างก็เป็นตัวผกผันของกันและกัน เพราะว่า

$0 + 1 = 1$ และ $0 \times 1 = 0$

$1 + 0 = 1$ และ $1 \times 0 = 0$

การนำพีชคณิตแบบบูลไปประยุกต์ในด้านวงจรอิเล็กทรอนิกส์ โดยอาศัยหลักการสมสัญฐานของสวิตช์และการทำงานของสวิตช์ในวงจรกับประพจน์และตัวเชื่อมในตรรกศาสตร์ พิจารณาการทำงานของสวิตช์ในวงจรไฟฟ้า สมมุติว่าสวิตช์ p เชื่อมวงจรที่จุดปลายของ A และ B ดังภาพที่ 2 การทำงานของสวิตช์จะมี 2 แบบคือ **สวิตช์เปิด**และ**สวิตช์ปิด** ถ้าสวิตช์เปิดวงจรจะขาด ไม่มีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านวงจร แต่ถ้าสวิตช์ปิดวงจรจะเชื่อมกันมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่าน เราใช้สวิตช์นี้ไปประกอบเชื่อมการทำงานของอุปกรณ์ไฟฟ้าต่างๆ เช่น หลอดไฟฟ้าเพื่อให้แสงสว่าง วิทยุ พัดลม ฯลฯ ถ้าสวิตช์ปิดหมายความว่าอุปกรณ์ไฟฟ้าเหล่านั้นทำงาน แต่ถ้าสวิตช์เปิดอุปกรณ์ไฟฟ้าเหล่านั้นจะไม่ทำงาน

ภาพที่ 2.

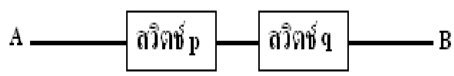
กำหนดให้สวิตช์ p ปิดแทนด้วย 1 และสวิตช์ p เปิดแทนด้วย 0 ดังนั้น ถ้า p มีค่าเป็น 0 จะได้นิเสธของ p เป็น 1 และถ้า p เป็น 1 จะได้นิเสธของ p เป็น 0 ในทางตรรกศาสตร์นิยมให้นิเสธของ p แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$ หรือ p' ค่าของ p และ $\sim p$ แสดงได้ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5

p	$\sim$p
1	0
0	1

พิจารณาวงจรที่มีสวิตช์ 2 ตัวเชื่อมกัน ซึ่งตามหลักวิชาฟิสิกส์มีการต่อเชื่อมสวิตช์ที่มีรูปแบบอยู่ 2 แบบคือ

1) **แบบอนุกรม** สวิตช์จะต่อเชื่อมเป็นเส้นตรงเดียวกันดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3.

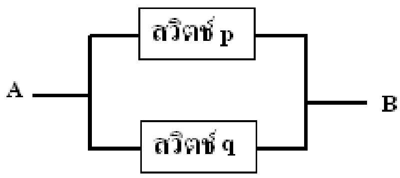
เราสามารถเปิดและปิดสวิตช์ p และ q สลับกันได้แบบต่างๆ กัน 4 แบบ วงจรจะมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านจากจุด A ไป B ได้นั้น สวิตช์ p และ q จะต้องปิดทั้งคู่ สำหรับแบบอื่นๆ นอกจากนั้นจะไม่มีกระแสไฟฟ้าผ่านจาก A ไป B ได้

กำหนดให้ วงจรไฟฟ้าปิดหรือมีกระแส ไฟฟ้าผ่านแทนด้วย 1 และวงจรไฟฟ้าเปิดหรือไม่มีกระแสไฟฟ้าผ่านได้แทนด้วย 0 เมื่อต่อสวิตช์ p และ q เป็นวงจรแบบอนุกรมจะได้การทำงานของวงจรดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6

p	q	P และ q ต่อแบบอนุกรม
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2) **แบบขนาน** สวิตช์ p และ q จะเชื่อมวงจรไฟฟ้าที่จุดปลาย A และ B แบบขนานกันดังภาพที่ 4 การทำงานของสวิตช์จะสลับกันได้ 4 แบบ ถ้าสวิตช์ p และ q เปิดทั้งคู่ ทำให้ไม่มีกระแสไหลผ่าน A ไป B ส่วนแบบอื่นๆ นอกจากนั้น มีกระแสไหลผ่านวงจรได้



ภาพที่ 4.

กำหนดให้วงจรไฟฟ้าปิดหรือมีกระแสไฟฟ้าผ่านแทนด้วย 1 และวงจรไฟฟ้าเปิดหรือไม่มีกระแสไฟฟ้าผ่านแทนด้วย 0 จะสามารถสร้างตารางแสดงการทำงานของวงจรไฟฟ้าเมื่อต่อวงจรแบบขนานได้ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7

p	q	p และ q ต่อแบบขนาน
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

สำหรับการต่อวงจรไฟฟ้าเมื่อใช้สวิตช์มากกว่านี้ จะได้วงจรผสมขึ้นมาอีกแบบหนึ่งและการพิจารณาการทำงานของวงจร จะยุ่งยากซับซ้อนขึ้น แต่ก็จะสามารถใช้วิธีประยุกต์จากทฤษฎีของพีชคณิตแบบบูลไปใช้เพื่อให้ง่ายขึ้น

ในทางตรรกศาสตร์ค่าความจริงของประพจน์ (T, F) ที่ได้จากตัวเชื่อม ($\wedge, \vee$) กับการทำงานของสวิตช์ไฟฟ้า (ปิด, เปิด) และการต่อวงจร (อนุกรม, ขนาน) เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ให้ผลสมสัณฐานกันดังตารางที่ 8

ตารางที่ 8

ค่าความจริงของประพจน์ที่ได้จากตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์

1) นิเสธ

p	∼p
T	F
F	T

2) ตัวเชื่อม และ

p	q	p∧q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3) ตัวเชื่อม หรือ

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

การทำงานของวงจรไฟฟ้าจากการปิดเปิดของสวิตช์ในวงจรไฟฟ้า

1) สภาพ

p	∼p
1	0
0	1

2) วงจร อนุกรม

p	q	p และq
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3) วงจร ขนาน

p	q	p หรือ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ในตัวอย่างที่ 2 เราได้ว่า (S , + , x) เมื่อ S = {0, 1} เป็นพีชคณิตแบบบูลเมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการบวกและคูณสมาชิกของ S กับผลที่ได้ของการทำงานของสวิตช์ไฟฟ้า(ปิด, เปิด) และการต่อวงจร (อนุกรม, ขนาน) จะสมสัณฐานกัน ดังตารางที่ 9 (ทางซ้ายสมสัณฐานกับทางขวา)

ตารางที่ 9

สวิตช์และการต่อวงจรแบบขนาน

p	q	p หรือ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

การบวกสมาชิกของ S

สมาชิกของ S		ผลบวก
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

สวิตช์และการต่อวงจรแบบอนุกรม

p	q	p และ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

การคูณสมาชิกของ S

สมาชิกของ S		ผลคูณ
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ทฤษฎีที่สำคัญของพีชคณิตแบบบูลมีดังต่อไปนี้ ถ้า (S, +, x) เป็นพีชคณิตแบบบูล a, b, c เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก และ 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ แล้ว

1) $a + b = b + a$
2) $a \times b = b \times a$
3) $a + (b + c) = (a + b) + c$
4) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
5) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
6) $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$
7) $a + 0 = a$
8) $a \times 1 = a$
9) $a + a' = 1$
10) $a \times a'.= 0$
11) $a + 1 = 1$
12) $a \times 0 = 0$

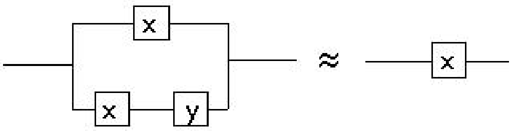
เนื่องจาก a, b, c เป็นสมาชิกใดๆ ใน S ดังนั้นค่าของ a, b, c จึงเป็น 1 หรือ 0 เพียงเท่านั้น ดังนั้นในทฤษฎีบท 5) กรณีที่เป็นไปได้ที่จะแสดงค่าของ $a \times (b + c)$ หรือ $(a \times b) + (a \times c)$ จึงต้องแสดงถึง 8 กรณี และเปรียบเทียบค่าที่ได้ทั้งสองในแต่ละกรณีดังตารางที่ 10 เห็นได้ชัดว่าช่อง $a \times (b + c)$ กับช่อง $(a \times b) + (a \times c)$ ให้ค่า 1 หรือ 0 เหมือนกันในแต่ละกรณี หรือกล่าวได้ว่า ถ้าวงจรสวิตช์ $a \times (b + c)$ ปิดจะได้วงจรสวิตช์ $(a \times b) + (a \times c)$ ปิดด้วย แต่ถ้าวงจรสวิตช์ $a \times (b + c)$ เปิดจะได้วงจรสวิตช์ $(a \times b) + (a \times c)$ เปิด นั่นคือ $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

ตารางที่ 10

a	b	c	a×b	a×c	b + c	a×(b + c)	(a×b) + (a×c)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

ค่าของ $a \times (b + c)$ ที่ยกตัวอย่างมาข้างต้นเรา เรียกว่า **นิพจน์แบบบูล** (Boolean expression) การเปลี่ยนนิพจน์แบบบูลซึ่งแทนด้วยวงไฟฟ้าแบบผสม จากรูปที่ยุ่งยาก สามารถใช้ทฤษฎีต่างๆ เปลี่ยนเป็นนิพจน์แบบบูลที่ง่ายขึ้น ศึกษาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 จงแสดงว่า



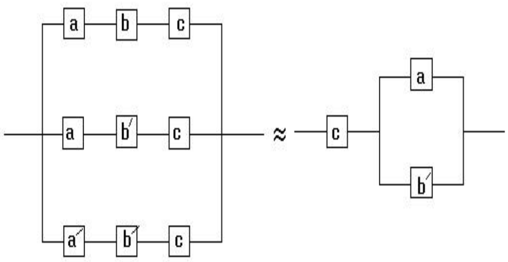
วิธีทำ เปลี่ยนวงจรทางซ้ายมือเป็นรูปนิพจน์แบบบูลได้คือ $x + xy$

(ในที่นี้จะเขียน xy หรือ x.y แทน $x \times y$) ดังนั้น

$$\begin{aligned} x + xy &= x.1 + xy \\ &= x(1 + y) \\ &= x.1 \\ &= x \end{aligned}$$

ซึ่งแทนได้ด้วยวงจรในรูปขวามือ

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า

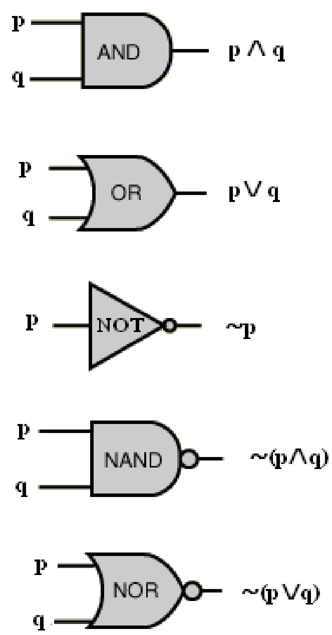


วิธีทำ เปลี่ยนวงจรทางซ้ายมือเป็นรูปของพีชคณิตแบบบูลได้คือ $a\,b\,c + a\,b'c + a'b'c$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} a\,b\,c + a\,b'c + a'b'c &= c(ab + ab' + a'b') \\ &= c[a(b + b') + a'b'] \\ &= c(a.1 + a'b') \\ &= c(a + a'b') \\ &= c(a + a')(a + b') \\ &= c.1(a + b') \\ &= c(a + b') \end{aligned}$$

ซึ่งแทนได้ด้วยวงจรในรูปขวามือ

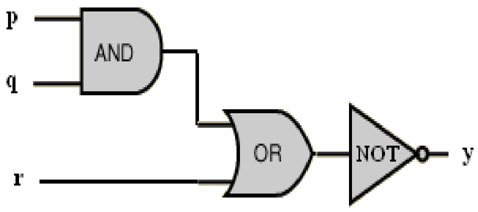
นักฟิสิกส์ได้ประยุกต์วงจรอิเล็กทรอนิกส์ในรูปแบบ**ประตูสัญญาณ** (gate) โดยกำหนด p, g, r,… เป็นประพจน์แทนสวิตช์ และใช้ตัวเชื่อม $\sim$, $\vee$, $\wedge$ เป็นตัวดำเนินการ สร้างประตูสัญญาณหลัก 5 แบบ คือ AND gate , OR gate, NOT gate, NAND gate และ NOR gate ประตูสัญญาณนี้มีสัญลักษณ์ดังภาพที่ 5 ตัวอย่างเช่นในภาพ AND gate ทางซ้ายตัวป้อนหรือข้อมูลเข้าคือ p, q ทางขวาคือข้อมูลออกเป็น $p \wedge q$ เป็นต้น



ภาพที่ 5.

การจัดวงจรผสมโดยใช้สัญลักษณ์ประตูสัญญาณแต่ละแบบเชื่อมโยงกัน ให้เกิดวงจรใหม่ ตัวอย่างเช่น ในภาพที่ 6 เมื่อตัวป้อนคือ p, q และ r และข้อมูลออกคือ y ซึ่งแทนได้ด้วย

$\sim\{(p\wedge q)\vee r\}$ นั่นคือ $y \approx \sim\{(p\wedge q)\vee r\}$



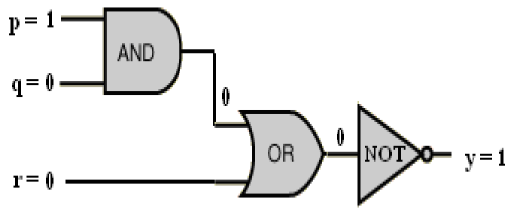
ภาพที่ 6.

ตรวจสอบโดยใช้ตารางค่า 1 และ 0 จากพีชคณิตแบบบูลที่กล่าวมาแล้ว จะได้ดังตารางที่ 11

ตารางที่ 11

p	q	r	$y \equiv \sim\{(p\wedge q)\vee r\}$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

จะสังเกตได้ว่าการป้อน p, q , r ด้วยค่าของ 1 หรือ 0 จะให้ค่า y ถึง 8 กรณี ตัวอย่างเช่นกรณีในแถวที่ 4 $p = 1, q = 0$ และ $r = 0$ เราได้ $p\wedge q = 0$, $(p\wedge q)\vee r = 1$ ดังนั้น $\sim\{(p\wedge q)\vee r\} = 0$ นี่คือ $y = 0$ แสดงตัวป้อน และข้อมูลออกได้ดังภาพที่ 7



ภาพที่ 7.

นักวิทยาศาสตร์สาขาอิเล็กทรอนิกส์ได้นำนิพจน์แบบบูล ไปประยุกต์วิธีการออกแบบ และตรวจสอบวงจรเชิงตัวเลข (digital circuits) ในวงจรเครื่องไฟฟ้าต่างๆ เช่น คอมพิวเตอร์ เครื่องเสียง โทรทัศน์ และโทรศัพท์ เป็นต้น ซึ่งนำไปพัฒนาสาขาวิชานี้

บทสรุป

พีชคณิตแบบบูลเป็นระบบคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซต และการดำเนินการแบบทวิภาคบนเซต 2 แบบ ซึ่งมีสมบัติการปิด การสลับที่ มีเอกลักษณ์ มีสมบัติการแจกแจง และสมาชิกทุกตัวมีตัวผกผัน พีชคณิตแบบบูลชนิด 2 ค่า คือ 0 และ 1 กับการดำเนินทวิภาค บวก และ คูณ โดยที่

กำหนดการบวกคือ $0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$

และการคูณคือ $0 \times 0 = 0$ $0 \times 1 = 0$

$1 \times 0 = 0$ $1 \times 1 = 1$

เป็นตัวแบบที่นำไปประยุกต์ใช้ในวงจรอิเล็กทรอนิกส์ โดยประยุกต์การบวกเป็นการทำงานของวงจรขนาน และ การคูณเป็นการทำงานของวงจรอนุกรม กำหนดค่าของ 1 คือวงจรเปิด และค่าของ 0 คือวงจรปิด ตัวแบบนี้สมสัญฐานกับค่า

เอกสารอ้างอิง

Cormen, T. H. and others. (2001). **Introduction to Algorithms** (2nd ed.). Boston : McGraw- Hill Book.

Hausner, M. (1992).**Discrete Mathematics.** New York : Suanders College Publishing.

Johnsonbuagh, R. (1993). **Discrete Mathematics** (3rd ed.). New York : Macmillan Publishing.

http://en.wikipedia.org/wiki/George_Boole

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electronic/digcktcon.html#c1