เอกลักษณ์ของนิวตัน

กำจร มุณีแก้ว*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร
*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

ได้รับบทความ: 17 มิถุนายน 2564
ได้รับบทความแก้ไข: 29 กรกฎาคม 2564
ยอมรับตีพิมพ์: 7 กันยายน 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ของนิวตันให้เห็นทุกขั้นตอนโดยละเอียด ซึ่งได้ผลเป็นจริงคือ พหุนามดีกรี n ในรูปตัวแปรเชิงซ้อน x

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

ที่มีสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และรากเชิงซ้อน $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ซึ่งไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน โดยกำหนดสัญกรณ์ดังนี้คือ

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k \quad ; k = 0,1,2 \ldots$$

สำหรับผลบวกของรากพหุนาม $P(x)$ ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังธรรมชาติ และ $E_0 = 1$,

$$E_k = \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k} \quad ; \; k = 1,2, \ldots, n$$

สำหรับรากพหุนามสมมาตร ซึ่งสอดคล้องตามความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}S_j = -ka_k \; ; \; k = 1,2, \ldots, n-1 \quad , \quad \sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j}S_j = 0 \; ; \; k \ge n$$

และ

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}E_{k-j}S_j = kE_k\,;\, k = 1,2,\dots,n-1,\quad \sum_{j=k-n}^{k}(-1)^{j}E_{k-j}S_j = 0\,;\, k \geq n$$

คำสำคัญ: เอกลักษณ์ของนิวตัน

Newton's Identities

Kumjorn Muneekaew*

Mathematics Program, Faculty of Science and Technology,
Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok
*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

Received: 17 June 2021
Revised: 29 July 2021
Accepted: 7 September 2021

Abstract

This article aims to show the proof of Newton's identities all the steps in detail which result is true as follow: the polynomial of degree n, in the complex variable x,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

with complex coefficients $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ and complex roots, not necessarily distinct, $x_1, x_2, \dots, x_n$. The notation is given by

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k \,;\, k = 0,1,2 \dots$$

for the sums of the natural powers of the roots of $P(x)$, and $E_0 = 1$,

$$E_k = \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k} \,;\, k = 1,2,\dots,n$$

for the symmetric polynomails in the roots. Which satisfy the relations

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}S_j = -ka_k \,;\, k = 1,2,\dots,n-1 \quad , \sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j}S_j = 0 \,;\, k \ge n$$

and

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}E_{k-j}S_j = kE_k \ ; \ k = 1,2,\dots,n-1, \ \sum_{j=k-n}^{k}(-1)^{j}E_{k-j}S_j = 0; k \geq n$$

Keywords: Newton's identities

บทนำ

Cirnu [1] ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์หนึ่งที่มีชื่อว่าเอกลักษณ์ของนิวตัน [2] ซึ่งเกี่ยวข้องกับรากพหุนามในรูปเลขยกกำลังธรรมชาติ โดยกำหนดพหุนามดีกรี n ในรูปตัวแปรเชิงซ้อน x

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

ที่มีสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ และรากเชิงซ้อน $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ซึ่งไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน โดยกำหนดสัญกรณ์ดังนี้คือ

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k \,; k = 0,1,2 \ldots$$

สำหรับผลบวกของรากพหุนาม $P(x)$ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังธรรมชาติ และ $E_0 = 1$,

$$E_k = \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k} \,;\; k = 1,2,\ldots,n$$

สำหรับรากพหุนามสมมาตร

ก่อนอื่นจะอธิบายถึงแนวคิดพื้นฐานที่จำเป็นเพื่อใช้ประกอบทฤษฎีบทเอกลักษณ์ของนิวตันให้ทราบเป็นที่เข้าใจดังนี้

1) $\sum_{j=0}^{n} a_j S_{n-j} = 0$

กำหนดให้ $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$

และ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นรากคำตอบของ $P(x) = 0$

จะได้ $a_0 {x_1}^n + a_1 {x_1}^{n-1} + a_2 {x_1}^{n-2} + \ldots + a_n = 0$

$$a_0 {x_2}^n + a_1 {x_2}^{n-1} + a_2 {x_2}^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

$$a_0 {x_3}^n + a_1 {x_3}^{n-1} + a_2 {x_3}^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

และ $a_0 {x_n}^n + a_1 {x_n}^{n-1} + a_2 {x_n}^{n-2} + \ldots + a_n = 0$

เพราะฉะนั้น

$$a_0(x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n) + a_1(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})$$

$$+a_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2} + x_3^{n-2} + \ldots + x_n^{n-2}) + \ldots + a_n(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \ldots + x_n^0) = 0$$

ดังนั้น $a_0S_n + a_1S_{n-1} + a_2S_{n-2} + \ldots + a_nS_0 = 0$

นั่นคือ $\sum_{j=0}^{n} a_jS_{n-j} = 0 \;\; ; \; S_0 = n$

2) $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j E_jS_{n-j} = 0$

จาก $E_k = \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k} \;\; ; \; k = 1,2,\ldots,n$

เมื่อ $n = 1$; $E_0S_1 = (1)x_1 = x_1$

$E_1S_0 = x_1(1) = x_1$

จะได้ $E_0S_1 - E_1S_0 = 0$

นั่นคือ $\sum_{j=0}^{1} (-1)^j E_jS_{1-j} = 0$

เมื่อ $n = 2$; $E_0S_2 = (1)(x_1^2 + x_2^2) = x_1^2 + x_2^2$

$E_1S_1 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_1$

$E_2S_0 = x_1x_2(x_1^0 + x_2^0) = 2x_1x_2$

จะได้ $E_0S_2 - E_1S_1 + E_2S_0 = 0$

นั่นคือ $\sum_{j=0}^{2} (-1)^j E_jS_{2-j} = 0$

เมื่อ $n = 3$; $E_0S_3 = (1)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

$E_1S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_1^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2 + x_3x_2^2$

$$E_2S_1 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$= x_2x_1^2 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_3x_1^2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_1x_2x_3$$
$$+ x_3x_2^2 + x_2x_3^2$$
$$E_3S_0 = (x_1x_2x_3)(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0) = 3x_1x_2x_3$$

จะได้ $E_0S_3 - E_1S_2 + E_2S_1 - E_3S_0 = 0$

นั่นคือ $$\sum_{j=0}^{3}(-1)^jE_jS_{3-j} = 0$$

ดังนั้นเราจึงอนุมานโดยสัจพจน์อุปนัยสำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ได้ดังนี้ว่า

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^jE_jS_{n-j} = 0 \quad ; \quad S_0 = n$$

1. เอกลักษณ์ของนิวตัน

ทฤษฎีบท ผลบวก S_k ของรากพหุนาม $P(x)$ ในรูปเลขยกกำลังที่สอดคล้องเอกลักษณ์ของนิวตัน

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}S_j = -ka_k \quad ; k = 1,2,\dots,n-1$$
$$\sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j}S_j = 0 \quad ; k \geq n$$
$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}E_{k-j}S_j = kE_k \quad ; k = 1,2,\dots,n-1$$
$$\sum_{j=k-n}^{k}(-1)^jE_{k-j}S_j = 0 \quad ; k \geq n$$

พิสูจน์

(1) $$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}S_j = -ka_k \quad ; k = 1,2,\dots,n-1$$

จาก $$\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}S_j = a_kS_0 + \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}S_j$$

$$= na_k + \sum_{j=0}^{k-1} a_jS_{k-j} \quad ; \; S_0 = n$$

$$= na_k - ka_k + \left(ka_k + \sum_{j=0}^{k-1} a_jS_{k-j} \right)$$

$$= (n-k)a_k \text{ โดยที่ } \sum_{j=0}^{k} a_jS_{k-j} = 0$$

พิจารณา $\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}S_j = (n-k)a_k \quad ; \; k = 0,1,\dots,n-1$

สำหรับ $k = 0$ จะได้ $a_0S_0 = na_0$ นั่นคือ $S_0 = n$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $$\sum_{j=0}^{1} a_{1-j}S_j = (n-1)a_1$$

$$a_1S_0 + a_0S_1 = na_1 - a_1$$

$$a_0S_1 = -a_1$$

$$\sum_{j=1}^{1} a_{1-j}S_j = -a_1$$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $$\sum_{j=0}^{2} a_{2-j}S_j = (n-2)a_2$$

$$a_2S_0 + a_1S_1 + a_0S_2 = na_2 - 2a_2$$

$$a_1S_1 + a_0S_2 = -2a_2$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{2-j}S_j = -2a_2$$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $\sum_{j=0}^{3} a_{3-j}S_j = (n-3)a_3$

$$a_3S_0 + a_2S_1 + a_1S_2 + a_0S_3 = na_3 - 3a_3$$

$$a_2S_1 + a_1S_2 + a_0S_3 = -3a_3$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{3-j}S_j = -3a_3$$

เราจะดำเนินการทำเช่นนี้เรื่อยไปจนถึง $k = n-1$

เมื่อ $k = n-1$ จะได้ $\sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1-j}S_j = (n-(n-1))a_{n-1}$

$$a_{n-1}S_0 + a_{n-2}S_1 + a_{n-3}S_2 + \ldots + a_0S_{n-1} = a_{n-1}$$

$$a_{n-2}S_1 + a_{n-3}S_2 + \ldots + a_0S_{n-1} = a_{n-1} - na_{n-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1-j}S_j = -(n-1)a_{n-1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}S_j = -ka_k$$

จากเมื่อกำหนดให้ $k = 1$ ถึง $k = n-1$ เราจึงได้ผลสรุปเป็นดังนี้

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}S_j = -ka_k \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,n-1$$

(2) $\sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j}S_j = 0 \quad ; \quad k \geq n$

เนื่องจาก $0 = \sum_{j=0}^{n+q} a_jS_{n+q-j}$

$$= \sum_{j=0}^{n+q} a_{n+q-j}S_j$$

$$= \sum_{j=0}^{q-1} a_{n+q-j} S_j + \sum_{j=q}^{n+q} a_{n+q-j} S_j$$

$$= 0 + \sum_{j=q}^{n+q} a_{n+q-j} S_j \quad \text{โดยที่ } a_{n+i} = 0 \ ; \ i = 1,2,\dots,q$$

$$= \sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j} S_j \quad \text{เมื่อ } k = n + q \geq n \ ; \ q = 0,1,\dots$$

ดังนั้น $\sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j} S_j = 0 \quad ; \ k \geq n$

(3) $\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} E_{k-j} S_j = kE_k \quad ; \ k = 1,2,\dots,n-1$

จาก $\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} E_{k-j} S_j = E_k S_0 + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} E_{k-j} S_j$

$$= nE_k + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} E_j S_{k-j}$$

$$= nE_k - kE_k + \left(kE_k + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} E_j S_{k-j} \right)$$

$$= (n-k)E_k + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} E_j S_{k-j}$$

$$= (n-k)E_k \quad \text{โดยที่ } \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} E_j S_{k-j} = 0$$

พิจารณา $\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} E_{k-j} S_j = (n-k)E_k \ ; \ k = 0,1,\dots,n-1$

สำหรับ $k = 0$ จะได้ $E_0S_0 = nE_0$ นั่นคือ $S_0 = n$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $\sum_{j=0}^{1}(-1)^j E_{1-j}S_j = (n-1)E_1$

$$E_1S_0 - E_0S_1 = nE_1 - E_1$$

$$E_0S_1 = E_1$$

$$\sum_{j=1}^{1}(-1)^{j-1} E_{1-j}S_j = 1E_1$$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $\sum_{j=0}^{2}(-1)^j E_{2-j}S_j = (n-2)E_2$

$$E_2S_0 - E_1S_1 + E_0S_2 = nE_2 - 2E_2$$

$$-E_1S_1 + E_0S_2 = -2E_2$$

$$E_1S_1 - E_0S_2 = 2E_2$$

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1} E_{2-j}S_j = 2E_2$$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $\sum_{j=0}^{3}(-1)^j E_{3-j}S_j = (n-3)E_3$

$$E_3S_0 - E_2S_1 + E_1S_2 - E_0S_3 = nE_3 - 3E_3$$

$$-E_2S_1 + E_1S_2 - E_0S_3 = -3E_3$$

$$E_2S_1 - E_1S_2 + E_0S_3 = 3E_3$$

$$\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} E_{3-j}S_j = 3E_3$$

เราจะดำเนินการทำเช่นนี้เรื่อยไปจนถึง $k = n - 1$

เมื่อ $k = n - 1$ จะได้ $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j E_{n-1-j}S_j = (n-(n-1))E_{n-1}$

$$E_{n-2}S_1 - E_{n-3}S_2 + \ldots + (-1)^{n-2}E_0S_{n-1} = -E_{n-1} + nE_{n-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\, E_{n-1-j}S_j = (n-1)E_{n-1}$$

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\, E_{k-j}S_j = kE_k$$

จากเมื่อกำหนดให้ $k = 1$ ถึง $k = n - 1$ เราจึงได้ผลสรุปเป็นดังนี้

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\, E_{k-j}S_j = kE_k \;\; ; \; k = 1,2,\ldots,n-1$$

(4) $$\sum_{j=k-n}^{k}(-1)^{j}E_{k-j}S_j = 0 \;\; ; \;\; k \geq n$$

เนื่องจาก $$0 = \sum_{j=0}^{n+q}(-1)^{j}\, E_{n+q-j}S_j$$

$$= \sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{j}\, E_{n+q-j}S_j + \sum_{j=q}^{n+q}(-1)^{j}\, E_{n+q-j}S_j$$

$$= 0 + \sum_{j=q}^{n+q}(-1)^{j}\, E_{n+q-j}S_j \quad \text{โดยที่} \quad E_{n+i} = 0 \;;\; i = 1,2,\ldots,q$$

$$= \sum_{j=k-n}^{k}(-1)^{j}\, E_{k-j}S_j \quad \text{เมื่อ} \quad k = n + q \geq n \;;\; q = 0,1,\ldots$$

ดังนั้น $$\sum_{j=k-n}^{k}(-1)^{j}\, E_{k-j}S_j = 0 \;\; ; \; k \geq n$$

2. การประยุกต์

ความรู้เกี่ยวกับผลบวกของรากพหุนามในรูปเลขยกกำลังนั้น มีประโยชน์ในหลาย ๆ ปัญหา อาทิเช่น กรณฑ์ (นิวตัน) และวิธีอัตราส่วน (ดาเนียล แบร์นูลลี) ของการคำนวณหารากของพหุนามโดยประมาณหรือทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ และทั้งนี้เอกลักษณ์ของ

นิวตันยังช่วยให้การคณนาค่าเหล่านี้เวียนเกิดกันไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยไม่ต้องใช้ผลของรากหรือสูตรของวีเอเต้หรือวิธีอื่น ๆ มาใช้

ตัวอย่าง คำนวณผลบวก $S_k = \sum_{j=1}^{6} x_j^k$; $k = 0,1,\dots,10$

ถ้า $x_0, x_1, \dots, x_6$ เป็นรากของพหุนาม $P(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 1$

วิธีทำ กำหนด $P(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 1$

ในที่นี้ $a_0 = 1, a_1 = 1, a_1 = 2, a_3 = a_4 = a_5 = 0$ และ $a_6 = 1$

จากเอกลักษณ์ของนิวตันที่กำหนดโดย

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j} S_j = -k a_k \ ; \ k = 1,2,\dots,n-1$$

เมื่อ $k = 1$; $\sum_{j=1}^{1} a_{1-j} S_j = a_0 S_1 = -a_1$

จะได้ $S_1 = -1$

เมื่อ $k = 2$; $\sum_{j=1}^{2} a_{2-j} S_j = a_1 S_1 + a_0 S_2 = -2a_2$

จะได้ $S_1 + S_2 = -4$

เมื่อ $k = 3$; $\sum_{j=1}^{3} a_{3-j} S_j = a_2 S_1 + a_1 S_2 + a_0 S_3 = -3a_3$

จะได้ $2S_1 + S_2 + S_3 = 0$

เมื่อ $k = 4$; $\sum_{j=1}^{4} a_{4-j} S_j = a_3 S_1 + a_2 S_2 + a_1 S_3 + a_0 S_4 = -4a_4$

จะได้ $2S_2 + S_3 + S_4 = 0$

เมื่อ $k = 5$; $\sum_{j=1}^{5} a_{5-j} S_j = a_4 S_1 + a_3 S_2 + a_2 S_3 + a_1 S_4 + a_0 S_5 = -5a_5$

จะได้ $2S_3 + S_4 + S_5 = 0$

และเมื่อ $k = 6 + q \geq n \;\; ; q = 0,1, \ldots$
และจากเอกลักษณ์ของนิวตันที่กำหนดโดย

$$\sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j} S_j = 0 \quad ; \; k \geq n$$

จะได้ $$\sum_{j=6+q-6}^{6+q} a_{6+q-j} S_j = 0$$

$$\sum_{j=q}^{6+q} a_{6+q-j} S_j = 0$$

$$a_6 S_q + a_5 S_{1+q} + a_4 S_{2+q} + a_3 S_{3+q} + a_2 S_{4+q} + a_1 S_{5+q} + a_0 S_{6+q} = 0$$

$$S_q + 0 + 2S_{4+q} + S_{5+q} + S_{6+q} = 0$$

หรือ $$S_{k-6} + 2S_{k-2} + S_{k-1} + S_k = 0$$

ดังนั้นจึงสรุปว่า $S_0 = 6$, $S_1 = -1$, $S_1 + S_2 = -4$

$$2S_{k-2} + S_{k-1} + S_k = 0 \quad ; \; k = 3,4,5$$

และ $$S_{k-6} + 2S_{k-2} + S_{k-1} + S_k = 0 \quad ; \; k \geq 6$$

ซึ่งผลลัพธ์โดยเวียนเกิดได้ผลเป็นดังนี้
$S_2 = -3$, $S_3 = 5$, $S_4 = 1$, $S_5 = -11$, $S_6 = 3$, $S_7 = 20$
$S_8 = -23$, $S_9 = -22$, $S_{10} = 67$

สรุป

กำหนดพหุนาม $P(x)$ ดีกรี n ในรูปตัวแปรเชิงซ้อน x ดังนี้

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \quad \text{เมื่อ} \quad a_0 \neq 0$$

โดยที่ $S_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k \; ; k = 0,1,2 \ldots$ เป็นผลบวกของรากพหุนาม $P(x)$ ในรูปเลขยกกำลังธรรมชาติซึ่งสามารถหาค่า S_k ได้ด้วยระบบสมการเวียนเกิด โดยอาศัยเอกลักษณ์ของนิวตัน

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k-j} S_j = -k a_k \quad ; \; k = 1,2, \ldots, n-1$$

และ $$\sum_{j=k-n}^{k} a_{k-j}S_j = 0 \quad ; \ k \geq n$$

เอกสารอ้างอิง

1. Cîrnu MI. Newton's identities and the Laplace transform. Am Math Mon 2010;117:67-71.
2. Mead DG. Newton's identities. Am Math Mon 1992;99:749-51.