ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป

กำจร มุณีแก้ว*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร
*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

ได้รับบทความ: 23 มกราคม 2563
ได้รับบทความแก้ไข: 11 พฤษภาคม 2563
ยอมรับตีพิมพ์: 16 พฤษภาคม 2563

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนออนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป โดยมีจุดประสงค์เพื่อพิสูจน์สูตรผลบวกของอนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งได้ผลการพิสูจน์เป็นจริง ดังนี้

ให้ $n \neq 0$ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป กำหนดโดยสูตรดังนี้

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \quad ; \quad |z| < 1$$

เมื่อ $E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \;\; ; \;\; k = 0,1,\dots,n-1$

$$E(n,0) = E(n,n-1) = 1$$

และ $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k) \;\; ; \;\; k = 1,2,\dots,n-2$

คำสำคัญ: อนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป

The Sum of Generalized Arithmetic-Geometric Series

Kumjorn Muneekaew*

Mathematics Program, Faculty of Science and Technology,
Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok
*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

Received: 23 January 2020
Revised: 11 May 2020
Accepted: 16 May 2020

Abstract

This article presents the generalized arithmetic–geometric series. The aim was to prove the formula for the sum of generalized arithmetic– geometric series by mathematical induction which result is true as follow:

Let $n \neq 0$ be a natural number and z is a complex variable. The sum of generalized arithmetic–geometric series are given by the formula

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \quad ; \quad |z| < 1$$

when $E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \;\; ; \;\; k = 0,1,\dots,n-1$

$$E(n,0) = E(n,n-1) = 1$$

and $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k) \;\; ; \;\; k = 1,2,\dots,n-2$

Keywords: Generalized arithmetic–geometric series

บทนำ

จำนวนแบบออยเลอร์เป็นจำนวนหนึ่งที่มีความเกี่ยวข้องกับอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตเป็นอย่างมาก เพราะช่วยให้เราสามารถเขียนค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ในอนุกรมได้โดยง่ายและถูกต้องแม่นยำ ซึ่งเคยกล่าวถึงไว้ตอนต้นมาแล้วโดยมีรายละเอียดดังนี้

ให้ $n \neq 0$ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ $E(n,k)$ เป็นจำนวนแบบออยเลอร์ นิพจน์รูปแบบปิดสำหรับจำนวนแบบออยเลอร์ กำหนดโดยสูตรดังนี้

$$E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \quad ; \; k = 0,1,\dots,n-1$$

เมื่อ $E(n,0) = E(n,n-1) = 1$

และ $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k) \; ; \; k = 1,2,\dots,n-2$

สำหรับ $k = n$ จะได้ $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j} (n-j+1)^n = 0$

และ $k \geq n+1$ จะได้ $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n = 0$

จากผลการวิเคราะห์โดยใช้สูตรนิพจน์ $E(n,k)$ ของ Cirnu [1] ซึ่งได้นำเสนอจำนวนแบบออยเลอร์ $E(n,k)$ ไว้เป็นตัวอย่าง ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างจำนวนแบบออยเลอร์ $E(n,k)$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ต่อไปจะกล่าวถึงอนุกรมอนันต์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบบออยเลอร์เป็นตัวอย่างให้เข้าใจก่อนดังนี้

กำหนดให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติและ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน

พิจารณา $\sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k$ สำหรับ $|z| < 1$

เมื่อ $n = 1$;

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = z\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}$$

$$= z\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} z^k$$

$$= z\frac{d}{dz}\frac{z}{1-z}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}E(1,0)$$

ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\sum_{k=0}^{0} E(1,k)z^k \qquad .....(1)$$

เมื่อ $n = 2$;

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2z^k = z\sum_{k=1}^{\infty} k^2z^{k-1}$$

$$= z\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$$

$$= z\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2z^k = \frac{z}{(1-z)^3}(1+z)$$

$$= \frac{z}{(1-z)^3}(\,E(2,0) + E(2,1)z\,)$$

ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2z^k = \frac{z}{(1-z)^3}\sum_{k=0}^{1} E(2,k)z^k \qquad .....(2)$$

เมื่อ $n = 3$;
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^k = z\sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^{k-1}$$
$$= z\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k$$
$$= z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^3}(1+z)\right]$$
$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^k = \frac{z}{(1-z)^4}(1+4z+z^2)$$
$$= \frac{z}{(1-z)^4}\left(E(3,0) + E(3,1)z + E(3,2)z^2 \right)$$

ดังนั้น
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^k = \frac{z}{(1-z)^4}\sum_{k=0}^{2} E(3,k)z^k \qquad .....(3)$$

เมื่อ $n = 4$;
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = z\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^{k-1}$$
$$= z\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^k$$
$$= z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^4}(1+4z+z^2)\right]$$
$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = \frac{z}{(1-z)^5}(1+11z+11z^2+z^3)$$
$$= \frac{z}{(1-z)^5}\left(E(4,0) + E(4,1)z + E(4,2)z^2 + E(4,3)z^3 \right)$$

ดังนั้น
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = \frac{z}{(1-z)^5}\sum_{k=0}^{3} E(4,k)z^k \qquad .....(4)$$

จาก (1) - (4) จึงสามารถอนุมานในรูปทั่วไปได้เป็นดังนี้

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \quad ; \quad |z| < 1$$

ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป

ทฤษฎีบท ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป

ให้ $n \neq 0$ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน

ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป กำหนดโดยสูตรดังนี้

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \quad ; \quad |z| < 1$$

เมื่อ $E(n,k)$ เป็นจำนวนแบบออยเลอร์ ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$E(n,0) = E(n,n-1) = 1$$

และ $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k)$; $k = 1, 2, \ldots, n-2$

พิสูจน์ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กำหนด $G_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \quad ; \quad |z| < 1$

$$G_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = z\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} z^k = z\frac{d}{dz}\frac{z}{1-z}$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}\sum_{k=0}^{0} E(1,k) z^k$$

ถ้าให้ $G_n(z)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $G_{n+1}(z)$ เป็นจริงด้วย ดังนี้

$$G_{n+1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+1} z^k = z\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k$$

$$= z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k\right]$$

$$= z\left[\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1} kE(n,k)\, z^{k-1} + \left(\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\right)\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k\right]$$

$$= z\left[\frac{1}{(1-z)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1} kE(n,k)\,z^k + \frac{(1+nz)}{(1-z)^{n+2}}\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\,z^k\right]$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{n+2}}\left[(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} kE(n,k)\,z^k + (1+nz)\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\,z^k\right]$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{n+2}}\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\,[(1-z)k + (1+nz)]z^k$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{n+2}}\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\,[\,k+1+(n-k)z\,]z^k$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{n+2}}(\,E(n,0)[\,1+nz\,] + E(n,1)[\,2+(n-1)z\,]z$$

$$+ E(n,2)[\,3+(n-2)z\,]z^2 + E(n,3)[\,4+(n-3)z\,]z^3$$

$$+ \ldots + E(n,n-2)[\,n-1+2z\,]z^{n-2} + E(n,n-1)[\,n+z\,]z^{n-1}\,)$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{n+2}}(\,E(n,0) + nE(n,0)z + 2E(n,1)z + (n-1)E(n,1)z^2$$

$$+ 3E(n,2)z^2 + (n-2)E(n,2)z^3 + 4E(n,3)z^3$$

$$+ \ldots + 2E(n,n-2)z^{n-1} + nE(n,n-1)z^{n-1} + E(n,n-1)z^n\,)$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{n+2}}(\,E(n,0) + [\,nE(n,0) + 2E(n,1)\,]z$$

$$+ [(n-1)E(n,1) + 3E(n,2)]z^2 + [(n-2)E(n,2) + 4E(n,3)]z^3$$

$$+ \ldots + [\,2E(n,n-2) + nE(n,n-1)]z^{n-1} + E(n,n-1)z^n\,) \quad \ldots(1.1)$$

จาก $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k)\ ;\ k = 1,2,\ldots,n-2$
เมื่อแทน n ด้วย $n+1$ ในความสัมพันธ์ $E(n,k)$ จึงได้

$$E(n+1,k) = (n-k+1)E(n,k-1) + (k+1)E(n,k)\ ;\ k = 1,2,\ldots,n-1 \quad \ldots(1.2)$$

และความสัมพันธ์สมมาตรของจำนวนแบบออยเลอร์ยังเป็นจริงได้สำหรับ

$E(n,0) = E(n+1,0)$ และ $E(n,n-1) = E(n+1,n)\ ;\ n = 1,2,\ldots$ ...(1.3)

นำความสัมพันธ์ (1.2) และ (1.3) แทนในความสัมพันธ์ (1.1) จึงได้ว่า

$$G_{n+1}(z) = \frac{z}{(1-z)^{n+2}}\left(E(n+1\,,0) + E(n+1\,,1)z + E(n+1\,,2)z^2 + E(n+1\,,3)z^3 + \ldots + E(n+1\,,n-1)z^{n-1} + E(n+1\,,n)z^n \right)$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{n+2}} \sum_{k=0}^{n} E(n+1\,,k)\, z^k$$

$$= \frac{z}{(1-z)^{(n+1)+1}} \sum_{k=0}^{(n+1)-1} E(n+1\,,k)\, z^k$$

ดังนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n\,,k)\, z^k \quad ; \ |z| < 1$$

สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ $n \geq 1$

การประยุกต์

อนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิต

ให้ $a\,,r\,,q$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ $|q| < 1$ โดยใช้สูตรผลบวกของอนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป สำหรับ n = 1 ได้ผลบวกเป็นดังนี้

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a + (k-1)r\,)q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(a - r + rk\,)q^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(a - r\,)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} rkq^{k-1}$$

$$= (a - r\,)\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} + \frac{r}{q}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$$

$$= (a - r\,)\left(\frac{1}{1-q}\right) + \frac{r}{q}\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]$$

$$= \frac{a-r}{1-q} + \frac{r}{(1-q)^2}$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{\infty}(a + (k-1)r\,)q^{k-1} = \frac{a(1-q\,) + rq}{(1-q)^2}$$

ผลการแปลง z

ผลการแปลง z ของลำดับที่มีกำลังเป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่งเขียนได้ในรูป $\{k^n : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ ซึ่งกำหนดโดยสูตร

$$z(\{k^n\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{z^k} = G_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{z}}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{E(n,j)}{z^j}$$

$$= \frac{z^n}{(z-1)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} E(n,j) z^{-j}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} E(n,j) z^{n-j-1}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,n-k-1) z^k \quad ; \quad j = n-k-1$$

จาก $E(n,0) = E(n,n-1) \;\; ; \;\; n = 1, 2, \ldots$

ถ้าให้ $k = n-1$ จะได้ $n-k-1 = 0$

จึงได้ว่า $E(n,k) = E(n,n-k-1) \;\; ; \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1$

ดังนั้น $$z(\{k^n\}) = \frac{z}{(z-1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k) z^k \quad ; \quad |z| > 1$$

ตัวอย่าง $$z(\{k\}) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$z(\{k^2\}) = \frac{z(1+z)}{(z-1)^3}$$

$$z(\{k^3\}) = \frac{z(1+4z+z^2)}{(z-1)^4}$$

$$z(\{k^4\}) = \frac{z(1+11z+11z^2+z^3)}{(z-1)^5}$$

สรุป

ให้ $n \neq 0$ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต–เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป กำหนดโดยสูตรดังนี้

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \quad ; \quad |z| < 1$$

เมื่อ $E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \quad ; \quad k = 0,1,\dots,n-1$

$$E(n,0) = E(n,n-1) = 1$$

และ $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k) \quad ; \quad k = 1,2,\dots,n-2$

เอกสารอ้างอิง

1. Cîrnu MI. Eulerian numbers and generalized arithmetic-geometric series. UPB Sci Bull, Series A 2009;71:25-30.