ลำดับประเภทที่สอง

กำจร มุณีแก้ว[1,*]

[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพฯ

[*]Corresponding author e-mail: munee.j@hotmail.com

บทคัดย่อ

ลำดับประเภทที่สองได้ถูกนำเสนอโดย Abdul-Majid Wazwaz จัดเป็นลำดับประเภทใหม่ที่มีพจน์ทั้งหลายอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ที่เกี่ยวข้องกับแฟกทอเรียล เพื่อนำไปใช้เป็นพื้นฐานการคำนวณผลในแคลคูลัส ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 แบบดังนี้ คือ $C = \{ c_n \}$ โดยที่พจน์ของ c_nเป็นอนุกรมของจำนวนจริง และ $D = \{ d_n \}$ โดยที่พจน์ของ d_n เป็นอนุกรมสลับของจำนวนจริง กำหนดโดย

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)(k!)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

และ

$$d_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n+k+1)(k!)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างอนุกรมอนันต์ c_n และ d_n ด้วยกระบวนการใหม่ที่สามารถอนุมานให้อยู่ในรูปวางนัยทั่วไปพร้อมทั้งวิเคราะห์หาลิมิตและผลบวกของอนุกรมซึ่งได้ผลเป็นดังนี้

1. อนุกรมอนันต์ c_n และ d_n ในรูปวางนัยทั่วไป เป็นดังนี้

$$c_n = e\left[\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!} \right] - (-1)^n\, n! \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$d_n = -e^{-1}\left[\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!} \right] + n! \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. ลิมิตและผลบวกของอนุกรมอนันต์ c_n และ d_n ได้ผลเป็นดังนี้

1) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \to \infty$

2) $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \to \infty$

คำสำคัญ : ลำดับประเภทที่สอง/ อนุกรมอนันต์

A Second Type of Sequences

Kumjorn Muneekaew[1,*]

[1]Mathematics Program, Faculty of Science and Technology, Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok
[*]Corresponding author e-mail: munee.j@hotmail.com

Abstract

A second type of sequence was present by Abdul-Majid Wazwaz, the new types of sequences whose terms are infinite series involving factorials, to apply fundamental computes of calculus which has been separated into two models; $C = \{ c_n \}$, whose terms c_n are series of real numbers and $D = \{ d_n \}$, whose terms d_n are an alternating series of real numbers; are given by:

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)(k!)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

and $$d_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n+k+1)(k!)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

The objective of this article is to construct series c_n and d_n by the new process into the generalization form with the analytic for the limit and the sum of all both which the results below:

1. The model of series c_n and d_n are given by the generalization form which the results below:

$$c_n = e\left[\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!}\right] - (-1)^n n! \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$d_n = -e^{-1}\left[\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!}\right] + n! \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. The limit and the sum of infinite series $\mathbf{c_n}$ and $\mathbf{d_n}$ which the results below:

1) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \to \infty$

2) $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \to \infty$

Keywords: a second type of sequences/ infinite series

บทนำ

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่ $x = 0$ เพราะฉะนั้นจึงสามารถเขียน f ในรูปอนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series) ได้เป็นดังนี้คือ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{เมื่อ} \quad f(0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

ให้ $f(x) = e^x \quad ; \quad x \in R$

จะได้ $f^{(k)}(x) = e^x$ นั่นคือ $f^{(k)}(0) = 1$ เมื่อ $k \geq 0$

ดังนั้นจึงกำหนด e^x ในรูปอนุกรมแมคลอรินได้เป็นดังนี้

จาก $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

นั่นคือ $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

ถ้าให้ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{n+k}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าบนช่วง (0,1)

เราจึงต้องหาปริพันธ์ของ $x^n e^x$ ระหว่าง $x = 0$ และ $x = 1$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n e^x \, dx &= \Big((-1)^0 x^n e^x + (-1)^1 n x^{n-1} e^x + (-1)^2 n(n-1) x^{n-2} e^x \\
&\quad + (-1)^3 n(n-1)(n-2) x^{n-3} e^x + \cdots + (-1)^n n!\, e^x \Big) \Big|_0^1 \\
&= \big[(-1)^0 e + (-1)^1 ne + (-1)^2 n(n-1)e \\
&\quad + (-1)^3 n(n-1)(n-2)e + \cdots + (-1)^n n!\, e \big] - (-1)^n n! \\
&= e\left[(-1)^0 \frac{n!}{(n-0)!} + (-1)^1 \frac{n!}{(n-1)!} + (-1)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^3 \frac{n!}{(n-3)!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{(n-n)!} \right] - (-1)^n n! \\
&= e\left[\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!} \right] - (-1)^n n!
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 x^n e^x\,dx = e\left[\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!}\right] - (-1)^n\, n! \quad ; \quad n = 1\,,2\,,3\,,\dots$

อีกประการหนึ่งเราก็สามารถกำหนด e^{-x} ให้อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ได้เช่นเดียวกันดังนี้

จาก $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

จึงได้ $$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k$$

นั่นคือ $$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}x^k$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}x^{n+k}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าบนช่วง (0,1)

เราจึงต้องหาปริพันธ์ของ $x^n e^{-x}$ ระหว่าง $x = 0$ และ $x = 1$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx &= \left(-x^n e^{-x} - nx^{n-1}e^{-x} - n(n-1)x^{n-2}e^{-x} - n(n-1)(n-2)x^{n-3}e^{-x}\right. \\
&\qquad \left. - \cdots - n!\,e^{-x}\,\right)\Big|_0^1 \\
&= -e^{-1} - ne^{-1} - n(n-1)e^{-1} - n(n-1)(n-2)e^{-1} - \cdots - n!\,e^{-1} + n! \\
&= -e^{-1}(\,1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n!\,) + n! \\
&= -e^{-1}\left[\frac{n!}{(n-0)!} + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-3)!} + \cdots + \frac{n!}{(n-n)!}\right] + n! \\
&= -e^{-1}\left[\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!}\right] + n!
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = -e^{-1}\left[\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!}\right] + n! \quad ; \quad n = 1\,,2\,,3\,,\dots$

เนื้อหา

ลำดับประเภทที่สองของอนุกรมอนันต์ได้แบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ ดังนี้

1. ลำดับ $\mathbf{C} = \{\, \mathbf{c_n} \,\}$ เมื่อ c_n เป็นอนุกรมอนันต์ของจำนวนจริง

นิยามโดย $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)(k!)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{(n+1)(0!)} + \frac{1}{(n+2)(1!)} + \frac{1}{(n+3)(2!)} + \frac{1}{(n+4)(3!)} + \frac{1}{(n+5)(4!)} + \cdots \\
&= \frac{n!}{(n+1)!\,0!} + \frac{(n+1)!}{(n+2)!\,1!} + \frac{(n+2)!}{(n+3)!\,2!} + \frac{(n+3)!}{(n+4)!\,3!} + \frac{(n+4)!}{(n+5)!\,4!} + \cdots \\
&= \frac{n!}{(n+1)!\,0!} + \frac{n!\,(n+1)}{(n+2)!\,1!} + \frac{n!\,(n+1)(n+2)}{(n+3)!\,2!} + \frac{n!\,(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)!\,3!} \\
&\qquad + \frac{n!\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+5)!\,4!} + \cdots \\
&= \frac{n!}{(n+1)!\,0!} + n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,1!} - \frac{1}{(n+2)!\,0!}\right] \\
&\qquad + n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,2!} - \frac{1}{(n+2)!\,1!} + \frac{1}{(n+3)!\,0!}\right] \\
&\qquad + n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,3!} - \frac{1}{(n+2)!\,2!} + \frac{1}{(n+3)!\,1!} - \frac{1}{(n+4)!\,0!}\right] \\
&\qquad + n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,4!} - \frac{1}{(n+2)!\,3!} + \frac{1}{(n+3)!\,2!} - \frac{1}{(n+4)!\,1!} + \frac{1}{(n+5)!\,0!}\right] + \cdots \\
&= n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,0!} + \frac{1}{(n+1)!\,1!} + \frac{1}{(n+1)!\,2!} + \cdots\right] \\
&\qquad - n!\left[\frac{1}{(n+2)!\,0!} + \frac{1}{(n+2)!\,1!} + \frac{1}{(n+2)!\,2!} + \cdots\right] \\
&\qquad + n!\left[\frac{1}{(n+3)!\,0!} + \frac{1}{(n+3)!\,1!} + \frac{1}{(n+3)!\,2!} + \cdots\right] \\
&\qquad - n!\left[\frac{1}{(n+4)!\,0!} + \frac{1}{(n+4)!\,1!} + \frac{1}{(n+4)!\,2!} + \cdots\right] + \cdots \\
&= n!\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\right)\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+4)!} + \cdots\right] \\
&= n!\,e\,(-1)^{-n-1}\left(e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}\right) \\
&= (-1)^{-n-1}\,n! + e\left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-n} \frac{n!}{k!}\right]
\end{aligned}
$$

$$c_n = e\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\right] + (-1)^{n+1}\,n!$$

$$= e\left[(-1)^n\frac{n!}{0!} + (-1)^{n-1}\frac{n!}{1!} + \cdots + (-1)^1\frac{n!}{(n-1)!} + (-1)^0\frac{n!}{n!}\right] + (-1)^{n+1}\,n!$$

$$= e\left[(-1)^0\frac{n!}{(n-0)!} + (-1)^1\frac{n!}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-(n-1))!}\right.$$

$$\left. + (-1)^n\frac{n!}{(n-n)!}\right] + (-1)^{n+1}\,n!$$

$$= e\left[\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!}\right] - (-1)^n\,n!$$

ดังนั้นจึงได้ c_n ในรูปแบบวางนัยทั่วไปเป็นดังนี้

$$c_n = e\left[\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!}\right] - (-1)^n\,n! \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots.(1.1)$$

เมื่อพิจารณาลิมิตที่อนันต์ของ c_n ใน (1.1) จึงได้ว่า $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

และวิเคราะห์หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ c_n ได้เป็นดังนี้

จาก $$c_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k+1)(k!)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k+1)(k!)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(0!)} + \frac{1}{(n+2)(1!)} + \frac{1}{(n+3)(2!)} + \frac{1}{(n+4)(3!)} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{0!}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots\right) + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left[\frac{1}{0!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\cdots\right]$$

$$-\left[\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots\right]$$

$$=\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right]$$

$$= e\left[\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\right]-\text{convergent series}$$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ จึงเป็น divergent series

หมายเหตุ

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right]$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหา 1.1653822 และเนื่องจาก $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}$ คืออนุกรมฮาร์มอนิก (harmonic series) ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก (divergent series) เพราะฉะนั้น

$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - 1$ จึงเป็นอนุกรมลู่ออก

1. ลำดับ $\mathbf{D} = \{\,\mathbf{d_n}\,\}$ เมื่อ d_n เป็นอนุกรมอนันต์สลับของจำนวนจริง

นิยามโดย $d_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(n+k+1)(k!)}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น

$$d_n = \frac{1}{(n+1)(0!)} - \frac{1}{(n+2)(1!)} + \frac{1}{(n+3)(2!)} - \frac{1}{(n+4)(3!)} + \frac{1}{(n+5)(4!)} - \cdots$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!\,0!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!\,1!} + \frac{(n+2)!}{(n+3)!\,2!} - \frac{(n+3)!}{(n+4)!\,3!} + \frac{(n+4)!}{(n+5)!\,4!} - \cdots$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!\,0!} - \frac{n!\,(n+1)}{(n+2)!\,1!} + \frac{n!\,(n+1)(n+2)}{(n+3)!\,2!} - \frac{n!\,(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)!\,3!}$$
$$+ \frac{n!\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+5)!\,4!} - \cdots$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!\,0!} - n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,1!} - \frac{1}{(n+2)!\,0!}\right]$$
$$+ n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,2!} - \frac{1}{(n+2)!\,1!} + \frac{1}{(n+3)!\,0!}\right]$$
$$- n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,3!} - \frac{1}{(n+2)!\,2!} + \frac{1}{(n+3)!\,1!} - \frac{1}{(n+4)!\,0!}\right]$$
$$+ n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,4!} - \frac{1}{(n+2)!\,3!} + \frac{1}{(n+3)!\,2!} - \frac{1}{(n+4)!\,1!} + \frac{1}{(n+5)!\,0!}\right] - \cdots$$

$$= n!\left[\frac{1}{(n+1)!\,0!} - \frac{1}{(n+1)!\,1!} + \frac{1}{(n+1)!\,2!} - \cdots\right]$$
$$+ n!\left[\frac{1}{(n+2)!\,0!} - \frac{1}{(n+2)!\,1!} + \frac{1}{(n+2)!\,2!} - \cdots\right]$$
$$+ n!\left[\frac{1}{(n+3)!\,0!} - \frac{1}{(n+3)!\,1!} + \frac{1}{(n+3)!\,2!} - \cdots\right]$$
$$+ n!\left[\frac{1}{(n+4)!\,0!} - \frac{1}{(n+4)!\,1!} + \frac{1}{(n+4)!\,2!} - \cdots\right] + \cdots$$

$$= n!\left(\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!}\right)\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \cdots\right]$$

$$= n!\,e^{-1}\left(e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

$$= n! - e^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\right]$$

$$d_n = -e^{-1}\left[\frac{n!}{0!}+\frac{n!}{1!}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{n!}\right]+n!$$

$$= -e^{-1}\left[\frac{n!}{(n-0)!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\cdots+\frac{n!}{(n-(n-1))!}+\frac{n!}{(n-n)!}\right]+n!$$

$$= -e^{-1}\left[\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!}\right]+n!$$

ดังนั้นจึงได้ d_n ในรูปแบบวางนัยทั่วไปเป็นดังนี้

$$d_n = -e^{-1}\left[\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!}\right]+n! \;;\quad n = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots.(2.1)$$

เมื่อพิจารณาลิมิตที่อนันต์ของ d_n ใน (2.1) จึงได้ว่า $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$

และวิเคราะห์หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ d_n ได้เป็นดังนี้

จาก $d_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(n+k+1)(k!)} \;;\quad n = 1,2,3,\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(n+k+1)(k!)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(0!)}-\frac{1}{(n+2)(1!)}+\frac{1}{(n+3)(2!)}-\frac{1}{(n+4)(3!)}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{0!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left[\frac{1}{0!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\cdots\right]$$

$$+\left[\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\cdots\right]$$

$$=\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right]$$

$$=e^{-1}\left[\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\right]+\text{convergent series}$$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ จึงเป็น divergent series

หมายเหตุ

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right]$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหา 0.220588 แต่ $\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ต่อไปจะแสดงผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของลำดับประเภทที่สองไว้ ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของลำดับ c_n และ d_n

n	c_n	d_n
1	1	0.2642411
2	0.7182819	0.1606028
3	0.5634363	0.1139289
4	0.4645365	8.783632E-02
5	0.3955996	7.130217E-02
.	…	…
.	…	…
.	…	…
16	0.1514609	2.290879E-02
17	0.1434468	2.156988E-02
18	0.1362399	2.037847E-02
19	0.1297239	1.931150E-02
20	0.1238038	1.835047E-02
21	0.1184014	1.748039E-02
22	0.1134514	1.668893E-02
23	0.1088993	1.596593E-02
24	0.1046989	1.530288E-02
25	0.1008108	1.469264E-02
26	9.720148E-02	1.412913E-02
27	9.384196E-02	1.360721E-02
28	9.070714E-02	1.312243E-02
29	8.777516E-02	1.267097E-02
30	8.502696E-02	1.224950E-02
$n \to \infty$	0	0
	$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \to \infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \to \infty$

สรุป

จากการศึกษาและวิเคราะห์เชิงตัวเลขลำดับประเภทที่สองของอนุกรมอนันต์ได้ผลเป็นดังนี้

1. อนุกรมอนันต์ c_n ในรูปวางนัยทั่วไปได้เป็น

$$c_n = e\left[\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{n!}{(n-r)!}\right] - (-1)^n n! \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ซึ่งได้ผลสรุปคือ $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \to \infty$

2. อนุกรมอนันต์ d_n ในรูปวางนัยทั่วไปได้เป็น

$$d_n = -e^{-1}\left[\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!}\right] + n! \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ซึ่งได้ผลสรุปคือ $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \to \infty$

เอกสารอ้างอิง

Abdul, M.W. (1992). Sequences of series. **Appl. Math. Letters**, 5(3), 39-43.

Hardy, G.H. (1963). **Divergent series.** London: Oxford University Press.